Jacques Hadamard (1865-1963)

AVENÇOS DE L'ANÀLISI AL SEGLE PASSAT

per

Joan Cerdà

I. Introducció

En aquestes línies hom tracta de fer alguns comentaris esquemàtics sobre alguns fets considerats importants dins el progrés de l'Anàlisi a l'època que tractem.

Al segle XVIII hom desenvolupa i aplica amb gran entusiasme i habilitat el Càlcul Infinitesimal que el segle XVII havia descobert. Els Bernouilli, Euler, Lagrange i Laplace, reconeixent la gran efectivitat dels nous mètodes, deliberadament substitueixen arguments geomètrics per arguments analítics, creant les teories de les sèries, de les equacions diferencials ordinàries i en derivades parcials, del càlcul de variacions, etc. Malgrat que els matemàtics continuïn anomenant-se geòmetres, l'Anàlisi arribarà a ocupar el centre de les Matemàtiques.

En el segle XIX, en contrast amb les expectatives dels Euler, D'Alembert, Lagrange, etc., que a finals del XVIII consideraven que els matemàtics havien esgotat les idees i no veien res d'interessant per al futur, la producció serà encara superior.

En efecte, nous països (Itàlia, Alemanya, els Estats Units) s'incorporen a aquesta producció matemàtica, i Anglaterra amb la creació de la *Societat Analítica* (Cambridge 1813) deixarà el seu aïllament del segle XVIII, produït pel fet que els anglesos, a partir de la controvèrsia Newton-Leibniz, es dedicaven a estudiar Newton en lloc de fer ciència nova, a la vegada que a Oxford i a Cambridge hom no permetia que hi estudiessin jueus ni persones no addictes a l'Església d'Anglaterra (amb qualque excepció, com les de Taylor i MacLaurin).

A més, les Matemàtiques comencen a produir-se a les Universitats (s'havien estat fent quasi exclusivament al voltant de les acadèmies) gràcies a fets com el de la fundació de la Universitat de Berlín (A. von Humboldt, 1810), amb la innovació de la contractació de professors d'investigació que podien explicar segons els seus interessos de recerca, i l'establiment a París de l'Ecole Polytechnique (1797) i de l'Ecole Normale Supérieure (1808).

Dins l'enorme expansió de l'Anàlisi, acompanyada dels fenòmens ben coneguts de l'especialització i d'una progressiva separació de la Física, que tant n'havia acompanyat i motivat els avenços, cal considerar com a fets fonamentals del segle XIX la ***rigorització de l'Anàlisi,*** amb l'eliminació d'imprecisions del Càlcul, i la ***creació de la teoria de funcions.***

Per a presentar aquests dos fets i la situació abans del 1800 ens serviran de referència tres equacions en derivades parcials que són bàsiques dins la Física Matemàtica i que per simplicitat considerarem principalment en el cas de dues variables. Es tracta de l'equació d'ona

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2},$$

l'equació de la calor

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

i l'equació de Laplace

$$\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

II. La situació fins al 1800

Per a valorar el procés de rigorització de l'Anàlisi, serà il·lustratiu revisar breument com durant el segle XVIII hom estudiava la corda vibrant i observar la falta de claredat que hi havia en l'ús de conceptes tan bàsics com els de funció, límit, derivada, suma d'una sèrie, etc.

Johan Bernouilli, el 1727, obté una primera aproximació del moviment d'una corda tensa i fixa als extrems (o i π per a fixar idees) que ha estat desplaçada sobre un pla i deixada anar lliurement.

La considera formada per n punts materials d'abscisses

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, \; x_2 = \frac{2\pi}{n}, \; \ldots, \; x_n = \pi.$$

Analitzant les forces que hi intervenen, observa que el desplaçament v_k de la partícula k-èsima (suposant que la tensió T i la massa total compleixen M = πT) verifica

$$(1) \qquad \frac{d^2 v_k}{dt^2} = \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 (v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}), \; (1 < k < n-1).$$

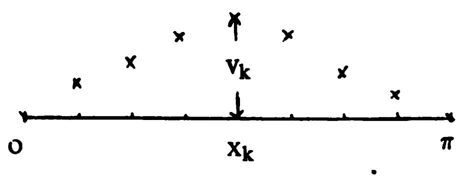

Figura 1

A partir d'aquí només descriu la freqüència fonamental del moviment com una corba sinusoïdal.

Daniel Bernouilli (1732/33), fill de Johan, estableix, exclusivament per consideracions físiques, el principi de superposició dels harmònics. El treball posterior d'Euler i D'Alembert el considerarà inútilment abstracte i assegurarà (1753) que tot el que aquests demostren és el seu principi.

Per primera vegada D. Bernouilli afirma que *totes* les corbes inicials

$$v(x,O) = f(x)$$

es poden representar sota la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi x)$$

car els infinits a_n a triar ho permeten (se suposa $f(o) = f(\pi) = O$ i, sempre que convigui, considerarem f prolongada a una funció periòdica sobre la recta).

D'aquí, sempre sense arguments matemàtics, arriba a l'expressió

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \cos(nt)$$

per a la solució del problema.

Cal dir que les funcions que a l'època es consideraven eren funcions "contínues" obtingudes a partir d'expressions algèbriques de les funcions elementals (i per tant analítiques) o bé, com a màxim i en determinades situaciones, funcions "geomètriques" o "mecàniques" ("que hom podia dibuixar lliurement" i que de fet eren analítiques a trossos).

Jean Le Rond D'Alembert, el 1746, substitueix les v_k de (1) per $v = v(x, t)$, i els increments $x_k - x_{k-1} = \frac{\pi}{n}$ per Δx.

El primer membre esdevé $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ i el segon

$$\frac{v(x + \Delta x,t) - 2v(x,t) + v(x - \Delta x,t)}{(\Delta x)^2} \tag{2}$$

D'Alembert és ben a prop de la definició actual de la noció de derivada, que considera com a límit del quocient incremental, amb les imprecisions habituals de la seva època pel que fa al concepte de límit.

D'aquesta manera observa que el límit de (2) es fa $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ i (1) passa a ésser l'equació de la corda vibrant

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Amb els mètodes que hom encara explica avui en els cursos elementals sobre equacions en derivades parcials, obté

$$v(x,t) = g(t + x) - \psi(t - x)$$

com a solució general, on g i h són "contínues" arbitràries.

Afegint les limitacions donades pel problema,

$$v(o,t) = v(\pi,t) = 0,\ v(x,o) = f(x),\ \frac{\partial v(x,o)}{\partial t} = 0,$$

arriba a

$$v(x,t) = \frac{1}{2} f(t + x) - \frac{1}{2} f(t - x)$$

Leonhard Euler, segurament la figura més representativa de l'època, en conèixer el treball de D'Alembert presenta un article (1748) seguint el mateix mètode però amb la diferència essencial d'admetre funcions "geomètriques" com a funcions inicials, per tal de poder considerar situacions tan naturals com la de la figura.

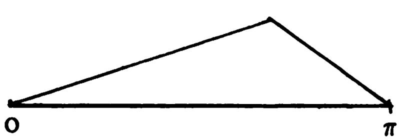

Figura 2

Però Euler només admet l'expressió de Daniel Bernouilli

$$v(x,t) = \Sigma a_n \sin(nx) \cos(nt)$$

en el "cas particular" de corbes inicials del tipus

$$f(x) = \Sigma a_n \sin(nx)$$

(sense precisar si la suma és finita o no), per a ell necessàriament contínues. Hom ha de tenir present que les sèries eren tractades com a sumes infinites.

Hom és encara lluny de superar les crítiques del bisbe *George Berkeley* que, de manera molt encertada, havia observat (1734) que en les derivades de Newton hom operava amb quocients incrementals per a anul·lar els increments al final dels càlculs, quan això, si hom ho fes al començament, portaria a considerar $\frac{0}{0}$. D'altra banda observà que els quocients de les diferencials de Leibniz determinaven secants i no tangents, i que hom pretenia corregir l'error eliminant diferencials d'ordre superior, o sigui, amb un segon error. És per això que, irònicament, considera les derivades com "fantasmes de quantitats que s'anul·len". Observant que l'única justificació de les manipulacions del càlcul és que hom arriba a resultats certs, Berkeley fa notar que "en tota altra ciència els homes demostren les conclusions a partir dels principis" i no al revés.

Euler tractà d'evitar les dificultats construint una teoria d'infinitèsims de diferent ordre o quantitats que s'anul·len abans que les d'ordre inferior, i així explicar la igualació dels O/O a nombres finits. Lagrange (1979) tractà de millorar el mètode i cregué que evitava el concepte de límit, considerat estrany a les Matemàtiques per les seves dificultats metafísiques, amb l'ús de sèries.

Aquests fets anaven acompanyats d'una falta de descripció precisa dels sistemes de nombres, que són a la base del càlcul. Els reals eren representats com a punts de la recta geomètrica i hom no es plantejava llur continuïtat. Els complexos es manejaven formalment perquè conduïen a resultats positius. Malgrat que John Wallis (1685) ja havia trobat una primera representació de C com a la figura (dibuixant un segment perpendicular a una recta de

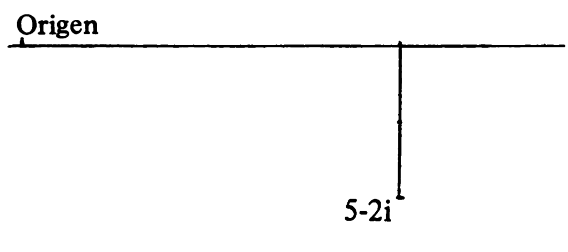

Figura 3

base per a representar un nombre complex), hom no arribarà a una representació clara i operativa fins a un treball de Wessel (1797), que passà desapercebut, i els de Gauss (1811) i Argand (1806).

El teorema fonamental de l'Àlgebra, ja enunciat per Euler, només havia tingut un intent de demostració per D'Alembert en el seu llibre "Théorie générale des vents". En donà la primera prova Gauss el 1799 considerant que l'anul·lació d'un polinomi

$$P(x,y) + iQ(x,y)$$

equival a

$$P(x,y) = O$$
$$Q(x,y) = O$$

i basant-se que si una de les dues corbes definides així passava d'un costat a l'altre de la segona corba, l'havia de tallar. Tot això a falta dè precisar encara la noció de continuïtat.

III. El començament del segle XIX. Funció, continuïtat i rigor

La confusió sobre la noció de funció i la polèmica que es produí al voltant de l'equació d'ona féu que els mètodes descrits en relació amb la corda vibrant fossin abandonats fins que en gran part els tornés a posar de moda Fourier, amb quelcom que presentaria un pas importantíssim en l'aclariment del concepte de funció.

Joseph Fourier (1768-1830) envia, el 1807, el seu primer article sobre la propagació de la calor a l'Acadèmia de Ciències de París. L'article és rebutjat per un jurat (Lagrange, Laplace i Legendre) però l'Acadèmia l'anima a continuar i Fourier, amb un article nou sobre el mateix tema presentat el 1811, guanya un premi que aquesta institució establí per a 1812. No obstant això, el treball és criticat per falta de rigor i no és publicat.

Fourier continua, el 1822 publica el seu famós llibre "Théorie analytique de la chaleur" i dos anys més tard –ja essent secretari de l'Acadèmia– ha aconseguit que li publiquin el seu article de 1811 en la forma original.

Amb raonaments físics havia establert que la distribució de la temperatura en un cos homogeni és regida per l'equació $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t}$, que en el cas unidimensional (de dues variables) és

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

El cas senzill d'una barra amb extrems ȯ, π, sempre a una temperatura de zero graus i amb una distribució inicial de temperatures f(x), es tradueix per la donada d'unes condicions a la frontera i inicials.

$$v(o,t) = v(\Pi,t) = o\ ,\ v(x,o) = f(x).$$

Passant a equacions diferencials ordinàries pel mètode de separació de variables, troba solucions del tipus $v = g(x)h(t)$ que compleixen les condicions a la frontera:

$$v_n(x,t) = \exp(-n^2 t)\sin(nx).$$

"Combinacions lineals infinites" porten a considerar, com Euler,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t)\sin(nx)$$

on caldrà determinar els coeficients imposant les condicions inicials

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx).$$

Però, considerant f prolongada a una funció imparella (és $f(o) = o$) i amb el període 2π sempre que faci falta, segueix un mètode de substitucions complicades en què suposa que pot escriure

$$f(x) = \sum_{k\geqslant 1} b_k x^k$$

$$\sin(nx) = \sum_{k\geqslant 1} b_{nk} x^{2k-1}$$

i determina els a_n en molts casos particulars resolent el sistema

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{nk}\, a_n = b_k \ (k = 1, 2, \ldots)$$

pel procediment de trobar solucions $a_n(m)$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$ del sistema mxm finit

$$\sum_{n=1}^{n} b_{nk} a_k = b_k \ (1 \leqslant n \leqslant m)$$

i fent

$$a_n = \lim_{m\uparrow\infty} a_n(m).$$

Després de tota aquesta feina, i sempre amb raonaments qüestionables, arriba a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin(ns)\, ds. \tag{2}$$

Es tracta de les conegudes "fórmules de Fourier"; que ell emprà sistemàticament però que Euler ja havia considerat.

Fourier va més enllà i assegura, tornant a Daniel Bernouilli, que *tota* funció inicial pot ésser representada en la forma (1) amb els coeficientes (2), i això ho porta a terme amb exemples com

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x > o \\ 1 \text{ si } x < o \end{cases}$$

sobre $[-\pi, \pi]$, i arriba al desenvolupament

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1} + \ldots\right)$$

sense preocupar-se en absolut de problemes de convergència i obtenint els desenvolupaments multiplicant per sin(mx)dx els dos membres de (1) i integrant sobre l'interval. Entén "integrar" com el cercar l'àrea per sota de les corbes f(s)sin(ns).

Fa també el pas de considerar funcions no imparelles descomponent-les en part parella i part imparella, i arriba a les expressions

$$f(x) = \frac{b_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx)).$$

equivalents, segons les fórmules d'Euler per a funcions trigonomètriques, a

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks}\, ds.$$

De la mateixa època és Simeon-Denis Poisson que, encara que fos gelós de Fourier i intentés atribuir la representabilitat de tota funció per mitjà de sèries de Fourier a Lagrange (aquest no acceptà tal possibilitant pensant en la "continuïtat" de tota funció), quedà impressionat pels seus resultats i pensava àdhuc que el mètode de Fourier era aplicable als problemes més variats d'equacions en derivades parcials (Fourier l'aplica també, per exemple, a l'equació de Laplace $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ quan considera distribucions estacionàries de la temperatura, o sigui, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$). Així, des del 1815, Poisson estigué treballant també en la propagació de la calor i els seus resultats són els que hi ha recollits en el seu llibre del 1835 "Théorie mathématique de la chaleur".

Amb el treball de Fourier queda posada de manifest la necessitat de precisar conceptes fonamentals com els de:

(a) Funció general.
(b) Suma d'una sèrie i representació d'una funció per una sèrie.
(c) Integral de funcions generals.
(d) Integrabilitat terme a terme.
(e) Condicions de convergència d'una sèrie de Fourier cap a la funció.

Tots ells, de manera progressiva, aniran quedant clars al llarg del segle XIX.

Respecte al problema (a) encara que Fourier a la pràctica només considera funcions "discontínues" com les d'Euler, o sigui, analítiques a trossos, de fet parla de funcions generals i s'aproxima al concepte modern de funció, que considera com "una successió de valors o ordenades, on cada una és arbitrària".

Agustin-Louis Cauchy (1789-1857), en el seu "Cours d'Analyse" de 1821, parla de funcions d'una variable (que és una "quantitat que va prenent successivament molts valors") com de les quantitats que s'expressen a partir d'ella. Admet, per exemple, les sèries com una manera "d'expressar" aquestes quantitats a partir de la variable.

Però és *Peter Gustav Lejeune-Dirichlet* (1805-1859, alumne de Gauss i successor seu a Göttingen) el primer que considera una funció genuïnament discontínua pertot en un article on ja dóna la definició actual de funció. El seu exemple és la

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x és racional} \\ 0 & \text{si x és irracional.} \end{cases}$$

És precisament en aquest treball, de 1829, on hom aborda per primera vegada amb rigor el problema (e) de la convergència puntual

$$S_n(f,x) \equiv \sum_{-n}^{n} e^{ikx}\, \hat{f}(k) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)?$$

Per aconseguir-ho, Dirichlet limita convenientment la classe de funcions ("generals" segons Fourier) considerant les que són contínues a trossos i monòtones a trossos (la d(x) no ho és), per a les quals prova la propietat

$$S_n(f,x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{f(x+o) + f(x-o)}{2}$$

de Dirichlet-Jordan (aquest últim la demostrà el 1881 per a les seves funcions de variació afitada).

La integral que falta per a això (problema (c)), essencialment fou construïda amb rigor per Cauchy en el seu "Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal" de 1822, on, per a una funció contínua (ja tenia una definició correcta de continuïtat), defineix

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \lim_{d(\sigma)\to 0} S(\sigma)$$

per a $S(\sigma) = \Sigma(x_{i+1} - x_i)\, f(x_i)$, si $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x)$ és partició de $[x_0, x]$ de norma $d(\sigma)$, i observant que hom pot canviar $f(x_i)$ per qualsevol $f(y)$ si $y \in [x_i, x_{i+1}]$. En justifica l'existència a partir de la continuïtat *uniforme* de f, que confon amb la continuïtat, igual com ho fa amb la convergència i la convergència uniforme de sèries. Cauchy encara creia que la suma d'una sèrie de funcions contínues és contínua (Abel, el 1826, mostraria un exemple de sèrie de funcions contínues, $a(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \ldots$, convergent cap a una funció discontínua en els punts $x = (2n + 1)\pi$), que tota funció contínua era derivable (almenys a trossos), que una funció separadament contínua de dues variables era contínua, etc. No fou fins a Weierstrass que aquests conceptes quedaren ben establerts.

Per bé que Bolzano el 1817 –com Cauchy el 1821– ja tenia la definició correcta de continuïtat, $f(x + \Delta x) - f(x)$ es fa tan petit com es vol si hom pren Δx prou petit, i la de derivada a partir dels quocients incrementals, aquests i altres conceptes bàsics havien d'esperar l'aparició de contraexemples aclaridors i la construcció rigorosa dels nombres reals (Weierstrass, Dedekind, Cantor, etc.) perquè llur ús fos totalment correcte.

IV. Els exemples de funcions estranyes

Els exemples d(x) de Dedekind, a(x) d'Abel i també un primer exemple de Bolzano, el 1834, de funció contínua no derivable, que passà desapercebut, no són sinó el començament d'un fet que marcaria l'època posterior a Cauchy i que recollia Poincaré (L'Enseignement Mathématique, 1899) quan escrivia:

"La lògica de vegades crea monstres. Al llarg de mig segle hem estat observant una massa de funcions estranyes que han estat obligades a assemblar-se el menys possible a les funcions honestes que serveixen per a qualque cosa...

Abans, quan era inventada una nova funció, es feia per raons pràctiques; avui s'inventen només per a mostrar els defectes del raonament dels nostres pares i d'elles només es dedueix això".

No obstant això, val a dir que la presentació d'alguna d'aquestes noves i estranyes funcions causà un fort impacte dins la comunitat matemàtica i que contribuïren a l'aclariment dels conceptes.

Riemann (*George Friedrich Bernhard Riemann,* 1826-1866, deixeble de Gauss i de Dirichlet, els quals succeí a Göttingen), en el seu treball d'habilitació docent de 1854 on estudia la representabilitat de funcions per sèries trigonomètriques, construeix la integral que porta el seu nom a partir de plantejar-se la qüestió de quines funcions afitades en un interval són integrables en el sentit d'existir el

$$\lim_{d(\sigma)\to 0} S(\sigma)$$

de la integral de Cauchy, i arriba a la caracterització que cercava a partir del concepte d'oscil·lació total d'una funció.

En aquest treball considera un exemple que esdevingué famós. Es tracta de la funció definida com la suma d'una sèrie convergent pertot

$$r(x) = (x) + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + \ldots$$

i que és contínua en tots els punts excepte en aquells on alguna de les (nx) té un salt, és a dir, els $x = \dfrac{p}{2n}$ amb p primer amb 2n (el salt és $\dfrac{\pi^2}{8n^2}$).

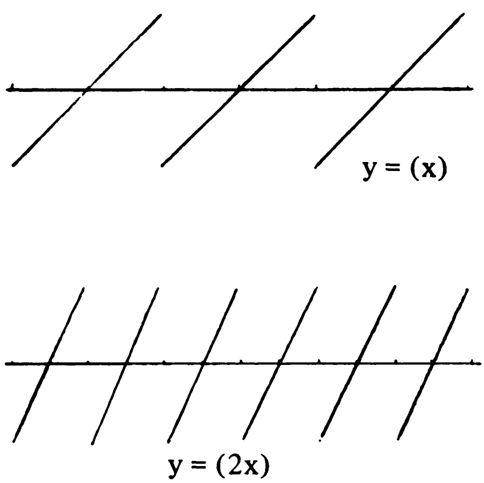

Figura 4

Aquesta funció, a pesar de tot, era integrable en tot interval i, considerant

$$R(x) = \int r(x)dx,$$

apareix una funció contínua pertot però no derivable en els punts de discontinuïtat de r(x).

Un altre exemple notable fou el de Weierstrass (*) (1872), publicat per Du Bois-Reymond (1875) (que també donà l'exemple de funció contínua periòdica f amb punts en els quals $S_n(f,x) \underset{n\to\infty}{\not\to} f(x)$). Es tracta d'una funció del tipus

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(21^n \pi x),$$

òbviament contínua però no derivable en cap punt.

Posteriorment aparegueren moltes variants i exemples nous que motivaren comentaris com el de Poincaré ja esmentat o com aquell d'Hermite quan deia "Em giro amb espant i horror davant d'aquesta plaga lamentable de funcions contínues que no tenen derivada".

V. Equació de Laplace, problema de Dirichlet i variable complexa

Des de Newton un problema fonamental fou determinar l'atracció gravitatòria d'un cos V com el Sol o la Terra amb densitat de massa m(y) sobre un altre.

Un punt y de massa m(y) crea un camp gravitatori newtonià

$$F(x) = -km(y) \frac{x-y}{|x-y|^3}$$

que deriva d'un potencial

$$v(x) = \frac{m(y)}{|x-y|}.$$

(*) Karl Wilheim Weierstrass (1815-1897, de família catòlica liberal de Westphalia) fou professor d'Institut ("Gymnasium") fins que la publicació d'uns treballs seus féu que el contractessin a la Universitat de Berlín quan ja tenia 40 anys, on esdevingué segurament el millor professor que mai no hagi tingut una Universitat.

Metòdic i meticulós (hom parla de "rigor Weierstrassià") buscava fonamentar l'anàlisi amb el rigor més que no en la intuïció geomètrica. Plantejà com a problema bàsic el d'establir rigorosament el sistema dels nombres reals i a partir d'ells construir l'anàlisi. Es el programa *d'aritmetització de l'anàlisi,* que dugué a terme amb els seus seguidors.

en el sentit d'ésser $F_j(x) = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x_j} v(x))$. Per "suma", el camp creat per V resulta que deriva del potencial

$$v(x) = \int_V \frac{m(y)}{|x-y|} dy$$

El segle XVIII els problemes físics ja eren estudiats a partir d'equacions diferencials i dins aquest fet se situa la consideració de *l'equació de Laplace*

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

que és satisfeta pel potencial newtonià v(x,y,z) a fora de V (hom pensava que també a l'interior, cosa que desmentí Poisson el 1813, establint sense demostració que es compleix $\Delta v = -4\pi m$).

El cas bidimensional apareix quan hom estudia l'efecte d'una distribució de massa (o de càrregues elèctriques) al llarg d'un fil recte indefinit perpendicular al pla x,y, així com per l'estudi de distribucions estacionàries de temperatura (en què $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$) sobre figures bidimensionals. Aleshores l'equació és

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

i en aquest cas el potencial logarítmic

$$v(x) = \int_V m(y) \quad \log \frac{1}{|x-y|} dy$$

substitueix el newtonià.

L'estudi de les *funcions harmòniques* (terminologia introduïda per Thomson cap a l'any 1850), solucions de $\Delta v = 0$, és relacionat amb les funcions holomorfes

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

pel fet que l'existència de derivada $\frac{df}{dz}$ (independent de la direcció en què hom prengui els increments) equival al fet que es compleixin les equacions de Cauchy-Riemann

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial v} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

de les quals resulten immediatament $\Delta u = \Delta v = O$.

Cauchy hi arriba en el seu càlcul integral quan considera dues funcions auxiliars U,V que compleixin les (1) i siguin tals que

$$f(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

per a l'estudi de la igualtat

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx.$$

És per aquest camí que Cauchy va a la fórmula

$$\int_\Gamma F(z)dz = O$$

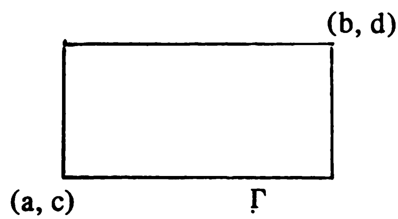

Figura 5

per a $F = U + iV$, en la qual basa la seva gran creació que és la teoria de funcions de variable complexa.

S'ha de fer constar que les equacions de Cauchy-Riemann ja havien estat tractades per D'Alembert i Euler en relació amb problemes d'hidrodinàmica i de càlcul integral pel procediment de passar al domini complex, com Cauchy.

La teoria del potencial interessà *Gauss* pel problema d'atracció gravitatòria d'un el·lipsoide (la Terra) sobre un punt material, pel problema de la representació conforme i per l'estudi del magnetisme de la Terra, que motivà el seu article fonamental de 1839, on construeix la teoria matemàtica de l'equació de Laplace $\Delta u = o$ i estableix de forma rigorosa l'equació de Poisson $\Delta v = -4\pi m$ del potencial newtonià.

Gauss aborda el problema de trobar el potencial (que compleix $\Delta v = o$ en un domini V), creat per una distribució de càrrega total donada, emprant un mètode variacional consistent a minimitzar una certa integral d'energia I(v) de la distribució de càrregues que aquí no descrivim però que a partir de la fórmula de Green-Ostrogradsky (que havia estat trobada independentment per aquests dos el 1828)

$$\int_V (v\Delta u + u\Delta v) = \int_{\text{vora de } V} (v \frac{du}{dn} + u \frac{dv}{dn})$$

resulta que equival a minimitzar la integral de Dirichlet-Thompson

$$D(v,v) = \int_V (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial z})^2 .$$

Aquest mètode, basat en el càlcul de variacions, era el més emprat en aquest tipus de problemes (Fourier tractava $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O$ pel seu mètode) i la feina feta fins als anys 1850 queda reflectida en el curs de Dirichlet a Göttingen (1856-1857) publicat per Grube (1876) quan Dirichlet ja era mort (1859).

Aquest és el primer text sobre el potencial. Amb motivacions electrostàtiques hom hi considera –com ho havia fet Gauss– el ***problema de Dirichlet*** consistent a resoldre

$$\begin{aligned} \Delta u &= O \quad \text{a } V \\ u &= f \quad \text{sobre la vora de } V. \end{aligned}$$

Hom considera evident l'existència de prolongacions contínues de f a funcions $u : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (les *funcions admissibles*) de les quals hom pot considerar la $D(u,u) \geqslant O$ que és *finita*.

També és considerada evident l'existència d'un mínim D(v,v) i tota altra u admissible, seguint els mètodes del càlcul de variacions de passar a funcions d'una variable t, s'escriu $u = v + tw$ ($w = 0$ sobre la vora de V); un càlcul fàcil assegura que

$$D(u,u) - D(v,v) = 2t\, D(v,w) + t^2\, D(w,w)$$

que, combinat amb la propietat de mínim, implica

$$2t\,D(v,w) + t^2\, D(w,w) \geq 0.$$

Haurà d'ésser D(v,w) = O, que la fórmula de Green-Ostrogradsky converteix en

$$D(v,w) = -\int_V (\Delta v)w = 0,$$

i l'arbitrarietat de w assegura que $\Delta v = 0$.

La diferència entre el treball de Dirichlet i el de Gauss és que aquest no té el problema de deduir que la v compleix $\Delta v = 0$.

Error fonamental de tots dos fou la confusió entre l'existència d'ínfim i la de mínim del funcional D(u,u) (i també el de suposar l'existencia de funcions admissibles). És el cas que, en la demostració del teorema fonamental de l'Àlgebra, Gauss criticà a D'Alembert el mateix error referit a funcions d'una variable en lloc de funcionals.

La mateixa equivocació tingué Riemann –deixeble de Gauss i de Dirichlet– en la seva tesi (1851) sobre funcions d'una variable i en el seu treball de 1857 sobre funcions abelianes.

És en aquests treballs on Riemann introdueix i estudia les propietats topològiques de les seves superfícies, sempre amb definicions ben intuïtives i geomètriques, per a estudiar les funcions algèbriques com a funcions sobre les superfícies, per tal de representar el fet que en funcions com $w = z^2$ a cada valor de w en corresponen dos de z.

És per això que considera el problema de representar conformement dominis simplement connexos de les seves superfícies i que, en la forma final demostrada per *Koebe* i *Poincaré*, es resol provant que tota superfície de Riemann simplement connexa és conformement isomorfa o a una esfera o al pla o al disc unitat, i les tres possibilitats s'exclouen mútuament.

Essencialment el mètode de Riemann per a provar l'existència de representació conforme F entre un domini pla simplement connex U limitat per una corba (Riemann no dóna condicions clares sobre la frontera) i el disc unitat D de manera que $F(a) = 0$ per a un punt prefixat a de U consisteix a escriure

$$F(z) = (z-a)\,G(z) = |z-a|\,e^{i\varphi(z)}\,G(z) = |z-a|\,e^{i\varphi(z)}\,e^{\log G(z)} =$$

$$= |z-a|\,e^{i\varphi(z)}\,e^{u(z)+iv(z)} = e^{\log|z-a|+u(z)}\cdot e^{i(\varphi(z)+v(z))}$$

i imposar que $|F(z)| = 1$ en els punts de la vora de U, o sigui $\log|z-a| + u(z) = 0$ en aquests punts.

Per tant tot es redueix a trobar una funció harmònica u sobre U (la funció v és l'harmònica conjugada) que sobre la vora de U compleix l'equació anterior, o sigui, a resoldre el problema de Dirichlet.

$$\begin{cases} \Delta u = o & \text{sobre U} \\ u(z) = -\log|z-a| & \text{sobre la vora de U} \end{cases}$$

i Riemann es remet al que ell mateix denominà *principi de Dirichlet,* consistent a minimitzar el funcional D(u,u).

Bé que ja abans de la mort de Riemann (1866) hi havia dubtes respecte al principi de Dirichlet, fou Weierstrass qui el rebaté observant que podien existir funcionals (com els D(u,u)) sense mínim malgrat l'acotació inferior. El funcional

$$J(g) = \int_{-1}^{1} x^2 g'(x)^2 \, dx$$

sobre funcions admissibles g de classe C^1 a l'interval $[-1,1]$ tals que $g(-1) = O$, $g(1) = 1$ compleix

$$\inf J(g) = O$$

i en canvi hom mai no podrà tenir $J(g) = O$ ja que això implicaria $g'(x) = O$ pertot, g seria constant i hom arribaria així a una contradicció amb el fet d'ésser $g(-1) \neq g(1)$.

Weierstrass proporciona un fort contrast amb Riemann en la presentació de les funcions de variable complexa. Desconfiant dels mètodes geomètrics de Riemann (que basava la teoria en la noció de diferenciabilitat i els mètodes geomètrics del potencial), pren com a punt de partida les sèries de potències

$$\Sigma\, a_n (z-a)^n$$

com a objectes elementals. Les seves funcions analítiques són funcions multiformes ($\sqrt{z}$, log z, . . .) definides per prolongació analítica dels objectes elementals.

N'estudiava les propietats de la manera més algèbrica possible i els seus mètodes són els dels desenvolupaments en sèrie, productes infinits, aproximacions per polinomis, etc.

Ja en el segle XX (1906), Hadamard mostrà l'altra equivocació de Dirichlet de suposar que hi ha funcions admissibles amb D(u,u) finit, presentant un problema de Dirichlet en el disc amb solució i per al qual el principi de Dirichlet no té sentit.

Foren intents per a provar el principi de Dirichlet (un mètode possible però no l'únic per a resoldre el problema de Dirichlet) els que portaren

Weierstrass a l'estudi general de màxims i mínims, i a aprofundir en el càlcul de variacions. Aquest estudi, amb la consideració de funcionals i l'anàlisi de les equacions integrals, donaria lloc a l'aparició de *l'anàlisi funcional,* amb trevalls de Volterra, Arzelà, Hilbert, etc., ja en el pas al nostre segle.

Arzelà (1889), observant que per a un funcional com el D definit sobre les funcions admissibles té la noció de continuïtat però no l'existència de màxims i mínims, proposa l'extensió a funcionals del càlcul per a funcions. És en aquest context que prova el teorema conegut com d'Ascoli-Arzelà sobre equicontinuïtat.

El 1900, Hilbert dóna una demostració rigorosa del principi de Dirichlet amb fortes restriccions per a les condicions a la frontera i preconitza que caldrà trobar la solució final debilitant les condicions.

Així és, i ho aconseguiren Zaremba i Nikodym amb la consideració d'uns espais de Hilbert que són denominats espais de Sobolev. Però amb això ja som al 1933.